

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.
- Observații privind subiectul I:
 - În cazul în care la o întrebare pe foaia de examen sunt mai multe răspunsuri (exemplu: “A, B”), niciunul dintre ele nu se punctează.
 - În cazul în care la o întrebare răspunsul nu este clar (exemplu: se scrie un caracter similar și cu “B” și cu “D”), răspunsul nu se punctează.
 - În cazul în care la o întrebare răspunsul final nu este corect dar există justificări parțial corecte, punctajul se calculează conform baremului afișat.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Răspuns corect: B $(1 + i)^2 = 2i$, deci $(1 + i)^{2024} = (2i)^{1012} = 2^{1012} \cdot (i^2)^{506} = (-1)^{506} \cdot 2^{1012} = 2^{1012}$.	5p 1p 3p
2.	Răspuns corect: D Prin scăderea relațiilor $x_i^2 - 3x_i + m = 0$, $i = \overline{1, 2}$, obținem $x_1^2 - x_2^2 = 3(x_1 - x_2)$. Din ipoteză, $x_1 - x_2 = 1$, iar prin împărțire la $x_1 - x_2$, $x_1 + x_2 = 3$. Rezolvăm sistemul de mai sus: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. 1 este soluție a ecuației $\Leftrightarrow m = 2$; se verifică și că 2 este soluție a ecuației cu $m = 2$.	5p 1p 1p 1p 1p
3.	Răspuns corect: B $2^{n+4} \cdot 6^n = 2^{2n+4} \cdot 3^n$ pătrat perfect $\Leftrightarrow 3^n$ pătrat perfect. 3^n pătrat perfect $\Leftrightarrow n$ este par.	5p 2p 2p
4.	Răspuns corect: B $E(x)$ definită dacă $x > 0$ și $x \neq 1$. În cazul acesta, $E(x) = \log_{x^2}(x(x+1)^2) - \log_x(x+1) = \log_{x^2}(x) + \log_{x^2}((x+1)^2) - \log_x(x+1) = \frac{1}{2}$.	5p 1p 3p
5.	Răspuns corect: C Dacă ℓ este lungimea laturii unui triunghi echilateral, atunci aria acestuia este dată de $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Prin urmare, $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, adică $\ell^2 = 6$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \ell^2 \cos(\widehat{ABC}) = \ell^2/2 = 3$.	5p 1p 1p 2p
6.	Răspuns corect: A Expresiile a, b, c sunt în progresie aritmetică dacă $a + c = 2b$. $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 2 + \frac{2(5 \sin x - 2)}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$. Ecuația $2t^2 - 5t + 2 = 0$ are soluțiile $t = 2$ și $t = \frac{1}{2}$. Cum $\sin x = 2$ nu are soluții reale, rezolvăm ecuația $\sin x = \frac{1}{2}$ în $[0, 2\pi]$.	5p 1p 2p 1p

1.a)	Legea se poate scrie mai simplu $A \circ B = (A - I_2)(B - I_2) + I_2$. Se cere deci să găsim E astfel încât $(A - I_2)(E - I_2) = A - I_2, \forall A \in \mathcal{G}$, ceea ce se întâmplă doar dacă $E - I_2 = I_2$, adică $E = 2I_2$.	1p 2p 2p
1.b)	Fie $X \in \mathcal{G}$, $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Atunci $X \circ X = \begin{pmatrix} (a-1)^2 + 1 & 0 \\ 2b(a-1) & (a-1)^2 + 1 \end{pmatrix}$. $X \circ X = 10I_2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 1 = 10, 2b(a-1) = 0$. Din $(a-1)^2 = 9$ rezultă că $a = 4$ sau $a = -2$, iar din a doua relație, $b = 0$.	2p 3p
1.c)	Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n = \underbrace{(-I_2) \circ \dots \circ (-I_2)}_{n \text{ ori}}$. Avem $A_{n+1} = A_n \circ (-I_2) = -2(A - I_2) + I_2$, deci $A_{n+1} - I_2 = -2(A_n - I_2)$. Prin inducție se demonstrează ușor că $A_n - I_2 = (-2)^{n-1}(A_1 - I_2) = (-2)^n I_2$. Așadar, $A_{2024} = (1 + 2^{2024})I_2$.	2p 2p 1p
2.a)	Avem $x^4 - 14x^2 + 9 = (x^2 - 7)^2 - 40 = (x^2 - 7 + 2\sqrt{10})(x^2 - 7 - 2\sqrt{10}) = [x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2] \cdot [x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2] = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b)$, unde $b = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Așadar, $f(a) = f(-a) = 0$.	4p 1p
2.b)	Să presupunem prin absurd că există $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ cu $\text{grad } g, \text{grad } h \geq 1$ astfel încât $f = gh$. Observăm mai întâi că celelalte rădăcini reale ale lui f sunt b și $-b$, cu b definit la punctul anterior. Dacă unul dintre polinoame ar avea gradul 1, atunci nu ar putea avea coeficienți raționali, deoarece ar avea ca rădăcină reală unul dintre numerele iraționale $\pm a, \pm b$. Dacă ambele polinoame au gradul 2, atunci, privite ca elemente ale lui $\mathbb{R}[X]$, unul dintre ele ar avea ca rădăcină pe a, și astfel ar fi de forma $r(X - a)(X + a)$, $r(X - a)(X + b)$ sau $r(X - a)(X - b)$, unde $r \in \mathbb{Q}^*$. Dar niciunul dintre acestea nu sunt din $\mathbb{Q}[X]$, întrucât primul are coeficientul liber $-ra^2 = r(2\sqrt{10} - 7)$, iar al doilea și al treilea au coeficientul lui X pe $r(b - a) = 2r\sqrt{5}$, respectiv $-r(a + b) = -2r\sqrt{2}$.	1p 1p 1p 2p
2.c)	Presupunem că există $h \in \mathbb{Z}[X]$, cu $h(a) = \sqrt{10}$. Fie c și r câtul, respectiv restul împărțirii lui h la f, astfel încât $h = c \cdot f + r$ și $\text{grad}(r) < 4$. Cum $h(a) = c(a)f(a) + r(a)$, din a) obținem că $r(a) = \sqrt{10}$. (1) Fie $r = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, cu $a_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{0, 3}$; cum $a = \sqrt{2} - \sqrt{5}, a^2 = 7 - 2\sqrt{10}, a^3 = 17\sqrt{2} - 11\sqrt{5}$, din (1) obținem : $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{5} + t\sqrt{10} = 0$ (2), unde $x = a_0 + 7a_2, y = a_1 + 17a_3, z = -a_1 - 11a_3, t = -2a_2 - 1$. (2) $\Rightarrow (x + t\sqrt{10})^2 = (y\sqrt{2} + z\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + 10t^2 - 2y^2 - 5z^2 + 2(xt - yz)\sqrt{10} = 0$. De aici rezultă ușor că $x^2 + 10t^2 = 2y^2 + 5z^2$ și $xt = yz$. Aceste relații ne permit să verificăm și că $(x - t\sqrt{10})^2 = (y\sqrt{2} - z\sqrt{5})^2$, de unde $x - t\sqrt{10} = \pm(y\sqrt{2} - z\sqrt{5})$. Adunând această relație cu (2), rezultă fie că $x = -z\sqrt{5}$, fie că $x = -y\sqrt{2}$. În ambele situații obținem $x = y = z = t = 0$. Dar t este număr întreg impar, de unde contradicția.	1p 2p 1p 1p

1.a)	Pentru $x = 1$, egalitatea este evidentă. Pentru $x > 1$, avem $f(x^2) \cdot 2x = \frac{2x(x^{2p} - 1)}{x^2 \ln(x^2)} = \frac{(x^p - 1)(x^p + 1)}{x \ln x} = f(x)(x^p + 1)$.	1p
1.b)	Fie $x > 1$. Se arată ușor că $g(x^{1/2^n}) = g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Trecând la limită cu $n \rightarrow +\infty$ și folosind continuitatea în 1 a lui g, obținem că $g(x) = g(1)$.	3p
1.c)	Avem $g(e^x) = g(e^{2x})$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Făcând transformarea $h(x) = g(e^x)$, obținem $h(x) = h(2x)$, $\forall x \in (0, +\infty)$, deci $h(e^x) = h(e^{x+\ln 2})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Făcând din nou aceeași transformare, anume $\check{h}(x) = h(e^x)$, obținem $\check{h}(x) = \check{h}(x + \ln 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $\check{h}$ este periodică de perioadă $\ln 2$. Un exemplu de astfel de funcție continuă, neconstantă, este $\check{h}(x) := \sin\left(\frac{2\pi}{\ln 2}x\right)$. Folosind transformările din sens opus, găsim $g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln 2} \ln \ln x\right)$, $x \in (1, +\infty)$, ceea ce înseamnă că rezultatul de la nu se păstrează.	2p
2.a)	Avem $\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$, iar $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{0}{1} = 0$. Așadar, $f(1-) = f(1+) = f(1)$, deci f este continuă în 1. Pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, +\infty)$, f este continuă, ca restricție a unor funcții elementare. Din continuitatea lui f rezultă concluzia.	1p
2.b)	Avem $\int \frac{x-1}{e^x} dx = -\int (x-1)(e^{-x})' dx = -(x-1)(e^{-x}) + \int e^{-x} dx = -(x-1)(e^{-x}) - (e^{-x}) + C = -xe^{-x} + C$, $x \in \mathbb{R}$, iar $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot (\ln x)' dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. Astfel, $F(x) = \begin{cases} -xe^{-x} + e, & x < 1; \\ \frac{\ln^3 x}{3} + e, & x \geq 1, \end{cases}$ unde constantele pe cele două ramuri au fost alese astfel încât $F(0) = e$ și funcția F să fie continuă în 1 (și astfel, derivabilă și în 1 cu $F'(1) = f(1)$).	2p
2.c)	Pentru $x \in [1, e]$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{xe^{1/x}}$. Deci $\int_1^e x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^e \frac{x(1-x)}{e^{1/x}} dx$.	1p
		1p
		3p